ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ NGỌC DAO

ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC CHỨA ĐẠO HÀM TRONG LỚP ĐA THỨC VÀ MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ NGỌC DAO

ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC CHỨA ĐẠO HÀM TRONG LỚP ĐA THỨC VÀ MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu**

THÁI NGUYÊN - 2017

Mục lục

Mở đầu

Chuyên đề về đa thức là một chuyên đề rất quan trọng ở bậc trung học phổ thông. Đa thức không chỉ là đối tượng nghiên cứu trọng tâm của đại số mà còn là công cụ đắc lực trong nhiều lĩnh vực khác của toán học.

Trong các kì thi học sinh giỏi toán các cấp, Olympic Toán sinh viên, các bài toán liên quan tới đa thức nói chung và đặc biệt là các bài toán về đẳng thức, bất đẳng thức và cực trị của đa thức chứa hoặc không chứa đạo hàm thường xuyên được đề cập. Những dạng toán này thường được là thuộc loại khó, hơn nữa phần kiến thức về đa thức và các dạng toán về đẳng thức, bất đẳng thức và cực trị lại không nằm trong chương trình chính thức của chương trình Số học, Đại số và Giải tích bậc trung học phổ thông.

Để đáp ứng nhu cầu bồi dưỡng giáo viên và bồi dưỡng học sinh giỏi về chuyên đề đa thức, tôi đã làm luận văn "Đẳng thức, bất đẳng thức chứa đạo hàm trong lớp đa thức và một số bài toán liên quan". Luận văn nhằm cung cấp một số các dạng toán về đẳng thức, bất đẳng thức đa thức chứa đạo hàm và trình bày các phương pháp giải chúng, xét các bài toán cực trị, khảo sát phương trình, bất phương trình đa thức cùng một số dạng liên quan.

Luận văn gồm phần mở đầu, kết luận và 3 chương.

Chương 1. Một số dạng đẳng thức và bất đẳng thức trong lớp hàm liên tục và hàm khả vi.

Chương 2. Các đẳng thức và bất đẳng thức chứa đạo hàm trong đa thức

Chương 3. Một số dạng toán liên quan.

Tiếp theo, trong các chương đều trình bày một hệ thống bài tập áp dụng giải các đề thi HSG quốc gia và Olympic liên quan.

Chương 1. Một số dạng đẳng thức và bất đẳng thức trong lớp hàm liên tục và hàm khả vi

Trong chương này trình bày một số tính chất cơ bản của các hàm liên tục và khả vi.

1.1 Tính chất cơ bản của hàm số liên tục

Định lý 1.1 (Tính trù mật của hàm liên tục, [4], [6])**.** Giả sử hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a)f(b) < 0$. Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Định lý 1.2 (Định lý về giá trị trung gian của hàm liên tục, [4],[6])**.** Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$, thì $f(x)$ nhận giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$. Tức là, với mọi γ nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$ luôn tồn tại giá trị $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = \gamma$.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $f(a) < f(b)$. Ta thấy định lý dễ dàng được chứng minh khi $\gamma = f(a)$ hoặc $\gamma = f(b)$.

Xét γ với $f(a) < \gamma < f(b)$. Ta chứng minh tồn tại giá trị $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = \gamma$.

Thật vậy, xét hàm $g(x) = f(x) - \gamma$ là một hàm liên tục trên $[a, b]$.
Ta lại có $g(a) < 0, g(b) > 0$ theo Định lý 1.1 luôn tồn tại giá trị $c \in (a, b)$ để $g(c) = 0$.

Điều đó cho thấy luôn tồn tại giá trị $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = \gamma$. Định lý được chứng minh.

Định lý 1.3 (Định lý Weierstrass, [4],[6])**.** Giả sử f là hàm xác định và liên tục trên $[a, b]$. Khi đó luôn tồn tại các giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $[a, b]$, tức là tồn tại $x_m, x_M \in [a, b]$ sao cho với mọi $x \in [a, b]$ ta luôn có $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$.

Chứng minh. Trước hết, ta đi chứng minh $f(x)$ bị chặn trên $[a, b]$. Giả sử $f(x)$ không bị chặn trên $[a, b]$, tức là với mọi $n \in \mathbb{N}$ tồn tại $x_n \in [a, b]$ sao cho $|f(x_n)| \geq n$.

Ta thấy dãy (x_n) bị chặn nên theo Định lý Balzano-Weierstrass tồn tại một dãy con của nó $x_{n_k} \to x_0 \in [a, b]$ sao cho $|f(x_{n_k})| \geq n_k$. Chuyển qua giới hạn, ta thu được $|f(x_0)| = +\infty$, mâu thuẫn vì $f(x)$ liên tục tại x_0. Vậy $f(x)$ bị chặn.

Gọi $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x), M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$. Lấy $\varepsilon = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in [a, b]$, sao cho $\dfrac{1}{n} > f(x_n) - m \geq 0$.

Theo Định lý Balzano-Weierstrass tồn tại một dãy con của nó x_{n_k} của (x_n) thỏa mãn $x_{n_k} \to x_m$ và $\dfrac{1}{n_k} > f(x_{n_k}) - m \geq 0$. Lấy giới hạn ta được

$$\lim_{x\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_m) = m.$$

Tương tự, tồn tại x_M để $f(x_M) = \sup\limits_{[a,b]} f(x) = M$.

Hệ quả 1.1. Nếu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục thì $f([a, b]) = [m, M] \subset \mathbb{R}$ trong đó $m = \min\limits_{[a,b]} f(x), M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$.

Ví dụ 1.1 (Hàm Dirichlet)**.** Khảo sát tính liên tục của hàm số

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x \text{ là số hữu tỷ,} \\ 0, & \text{nếu } x \text{ là số vô tỷ.} \end{cases}$$

Vì trong bất kỳ lân cận nào của điểm hữu tỷ đều tìm được các điểm vô tỷ và ngược lại, nên với điểm x_0 tùy ý trong khoảng $(-\infty, +\infty)$ không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$.

Như vậy, mọi điểm của trục thực là điểm gián đoạn từ hai phía của hàm Dirichlet.

Ví dụ 1.2 (Hàm Riemann)**.** Trên đoạn $[0,1]$ xét hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, \text{nếu } x = \dfrac{p}{q} \text{ là phân số tối giản,} \\ 0, \text{ nếu } x \text{ là số vô tỷ.} \end{cases}$$

Chứng minh rằng
- Các điểm hữu tỷ là điểm gián đoạn của hàm số,
- Các điểm vô tỷ là điểm liên tục của hàm số.

Chứng minh. Giả sử x_0 là một điểm tùy ý thuộc $[0,1]$. Với mỗi số $\varepsilon > 0$ chỉ tồn tại một số hữu hạn các số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $q \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$, nghĩa là trong đoạn $[0,1]$ chỉ có một số hữu hạn các số hữu tỷ dạng $\dfrac{p}{q}$, mà $f\Big(\dfrac{p}{q}\Big) = \dfrac{1}{q} \geq \varepsilon$. Xét lân cận đủ nhỏ của điểm x_0 dạng $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$, sao cho trong lân cận này không có điểm nào trong số các điểm hữu tỷ đã nói ở trên trừ điểm x_0).

Khi đó, với $|x - x_0| < \delta$, $(x \neq x_0)$ thì $|f(x)| < \varepsilon$. Nghĩa là, với mọi x_0 tồn tại $f(x_0 + 0)$, $f(x_0 - 0)$ và

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = 0.$$

Nếu x_0 là số vô tỷ, thì $f(x) = 0$, nghĩa là tại điểm này hàm số là liên tục, nếu x_0 là số hữu tỷ, thì $f(x_0) \neq 0$, do đó có gián đoạn từ hai phía.

Bài toán 1.1. Chứng minh rằng, nếu $f(x)$ là hàm liên tục, thì

$$F(x) = |f(x)|$$

cũng là hàm liên tục.

Lời giải. Giả sử $\varepsilon > 0$ tùy ý. Khi đó, tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, sao cho

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ khi } |x - x_0| < \delta.$$

Sử dụng bất đẳng thức $||A| - |B|| \leq |A - B|$, ta có

$$|F(x) - F(x_0)| = ||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

khi $|x - x_0| < \delta$, nghĩa là $F(x)$ cũng là hàm liên tục.

Nhận xét 1.1. Tuy nhiên, điều ngược lại nói chung không đúng.

1.2 Một số đẳng thức chứa đạo hàm cơ bản

Trong phần này, ta xét các định lý về giá trị trung bình.

Định nghĩa 1.1 ([4],[6])**.** Hàm số f được gọi là khả vi tại điểm a khi và chỉ khi tồn tại lân cận Ω của a sao cho tồn tại $f'(x)$ với mọi $x \in \Omega$.

Định nghĩa 1.2 ([4],[6])**.**
(i) Hàm số f được gọi là đạt cực tiểu địa phương tại điểm a khi và chỉ khi tồn tại lân cận Ω của a sao cho

$$f(x) \geq f(a), \ \ \forall x \in \Omega.$$

(ii) Hàm số f được gọi là đạt cực đại địa phương tại điểm a khi và chỉ khi tồn tại lân cận Ω của a sao cho

$$f(x) \leq f(a), \ \ \forall x \in \Omega.$$

Nhận xét 1.2. Về sau, ta gọi hàm số f đạt cực trị địa phương tại điểm a nếu f đạt cực đại hoặc cực tiểu địa phương tại điểm a.

Tiếp theo, ta trình bày các kết quả cơ bản liên quan đến các đẳng thức về giá trị trung bình của hàm số sau đây.

Định lý 1.4 (Định lý Fermat, [4])**.** Nếu hàm $f(x)$ khả vi tại điểm a và đạt cực trị địa phương tại a thì $f'(a) = 0$.
Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $f(x)$ đạt cực đại địa phương tại a. Điều đó cho thấy tồn tại lân cận Ω của a sao cho

$$f(x) - f(a) \leq 0, \ \ \forall x \in \Omega.$$

Với mọi $h \neq 0$ sao cho $a + h \in \Omega$, ta có
- Nếu $h > 0$ thì $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0$. Suy ra

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right] = f'(a) \leq 0. \tag{1}$$

- Nếu $h < 0$ thì $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0$. Suy ra

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right] = f'(a) \geq 0. \tag{2}$$

Từ (1) và (2), suy ra $f'(a) = 0$.

Tương tự, ta cũng có chứng minh cho trường hợp f đạt cực tiểu địa phương tại a.

Định lý 1.5 (Định lý Rolle)**.** Giả sử f là hàm liên tục trên $[a, b]$ và có đạo hàm trong (a, b). Nếu $f(a) = f(b)$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in [a, b]$ sao cho $f'(c) = 0$.

Chứng minh. Vì f liên tục trên $[a, b]$, theo Định lý Weierstrass hàm f phải đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a, b]$. Tức là, tồn tại các điểm $x_1, x_2 \in (a, b)$ sao cho

$$f(x_1) = \min_{x \in [a,b]} f(x) = m, \;\; f(x_2) = \max_{x \in [a,b]} f(x) = M.$$

Có hai khả năng xảy ra:

- Nếu $m = M$, khi ấy $f(x) = \text{ const }$ trên đoạn $[a, b]$, do đó $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a, b)$ và c là điểm bất kì trên khoảng đó.

- Nếu $m < M$, khi đó từ điều kiện $f(a) = f(b)$ nên có ít nhất một trong hai điểm x_1, x_2 không trùng với các đầu mút của $[a, b]$. Giả sử $x_1 \in (a, b)$, theo Định lý Fermat thì đạo hàm bằng 0 tại điểm này.

Nhận xét 1.3.

- Định lý Rolle nói chung sẽ không còn đúng nếu trong khoảng (a, b) có điểm c mà tại đó không tồn tại $f'(c)$.

- Điều kiện liên tục của hàm $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ cũng không thể thay bởi điều kiện $f(x)$ liên tục trong khoảng (a, b).

- Ý nghĩa hình học: Khi các điều kiện của Định lý Rolle được thỏa mãn thì trên đồ thị hàm số $y = f(x),\ \forall x \in [a, b]$ tồn tại điểm $M(c, f(c)), c \in (a, b)$ mà tại đó tiếp tuyến song song với trục hoành.

Hệ quả 1.2. Nếu đa thức $f(x)$ có n nghiệm phân biệt thuộc khoảng (a, b) thì đa thức $f'(x)$ có ít nhất $n - 1$ nghiệm phân biệt thuộc khoảng (a, b).

Đa thức $f^{(k)}(x)$ $(0 \leq k \leq n)$ có ít nhất $n - k$ nghiệm phân biệt thuộc khoảng (a, b).